Title	トーリック多様体と加群の複体
Author(s)	石田, 正典
Citation	代数幾何学シンポジューム記録 (1999), 1999: 78-83
Issue Date	1999
URL	http://hdl.handle.net/2433/214704
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

代数幾何学シンポジウム記録
1999年度 pp.78-83

トーリック多様体と加群の複体

東北大学 大学院理学研究科　　石 田 正 典

序文

N を階数 $r \geq 0$ の自由 $\mathbf{Z}$ 加群とする．部分集合 $\sigma \subset N_{\mathbf{R}} := N \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ が**凸多角錐体**あるいは単に錐体とは，ある有限部分集合 $\{x_1, \ldots, x_s\} \subset N_{\mathbf{R}}$ があって $\sigma = \mathbf{R}_0 x_1 + \cdots + \mathbf{R}_0 x_s$ となることと定義する．ここで $\mathbf{R}_0 := \{c \in \mathbf{R}\,;\, c \geq 0\}$ である．すべての x_i が N からとれるとき σ を**有理錐体**という．また，$\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$ であるとき σ を**強凸**という．凸多角錐体 σ の部分集合 η が**面**であるとは，$N_{\mathbf{R}}$ の線形関数 l が存在して $\sigma \subset (l \geq 0)$ かつ $\eta = \sigma \cap (l = 0)$ となることと定義する．このとき，これを $\eta \prec \sigma$ と書く．

$N_{\mathbf{R}}$ の強凸有理錐体からなる集合 X が**扇**または有理扇であるとは，次の三つの条件を満たすことと定義する．

(1) X は空でない．

(2) $\sigma \in X$ かつ $\eta \prec \sigma$ であれば $\eta \in X$ となる．

(3) $\sigma, \tau \in X$ であれば $\sigma \cap \tau$ は σ と τ の共通の面である．

同じ条件を満たす有理的とは限らない強凸錐体の集合を**実扇**と呼ぶ．

トーリック多様体の理論の基本は，r 次元のトーリック多様体が $\mathbf{R}^r$ の扇に対応していることである．ここでは扇をスキーム理論風に定義しなおす．これにより扇自身を一種の多様体とみなすことができて，対応するトーリック多様体はその「スキーム」の基底の拡大という形になる．このことは新しい指摘といえるものではないが，あまり適当な文献を挙げることもできない．

有理扇についてはすでに双対化複体，ドラム複体，交叉複体などの構成が可能であることがわかっている．扇をスキームのように考える動機として，これらの複体の理論を実扇にも一般化することがある．まだあまり多くの結果は得ていないが，

実扇上の複体のカテゴリーで双対関手を定義することはできた．この関手についてセールの双対性定理やポアンカレの双対性定理に相当する定理が成立する．

1 扇は一種のスキーム

この話に出てくる半群はすべてねじれのない加法群の 0 を含む部分半群とする．

S を半群とする．部分集合 $I \subset S$ が $I + S \subset I$ を満たすとき**イデアル**という．S のイデアル P が**素イデアル**とは $P \neq S$ であって $x, y \in S \setminus P$ なら $x + y \in S \setminus P$ となることと定義する．定義により，空集合は S の部分集合として常に素イデアルである．

半群 S の素イデアル全体を $\mathbf{1}\text{-}\mathrm{Spec}\, S$ と書く．

$X := \mathbf{1}\text{-}\mathrm{Spec}\, S$ とする．各元 $m \in S$ について $X_m := \{P \in X\,;\, m \notin P\}$ とおく．X には $\{X_m\,;\, m \in S\}$ を基本開集合族とする位相を導入する．X の**構造層** $\mathcal{S}_X$ は半群の層で，各 $m \in S$ について $\mathcal{S}_X(X_m) = S + \mathbf{Z}m$ となるものと定義する．この位相空間と半群の層の組 $(X, \mathcal{S}_X)$ を**アフィン 1 スキーム**と呼ぶ

例 1.1 0 だけからなる半群 $S = \{0\}$ について $\mathbf{1} := \mathbf{1}\text{-}\mathrm{Spec}\, S$ と書き，これを 0 次元トーラスと呼ぶ．

$\phi : T \to S$ を半群の準同型とする．$P \subset S$ を素イデアルとするとその引き戻し $\phi^{-1}(P)$ は T の素イデアルである．したがって，この対応 $P \mapsto \phi^{-1}(P)$ は写像

$$^a\phi : X = \mathbf{1}\text{-}\mathrm{Spec}\, S \longrightarrow Y = \mathbf{1}\text{-}\mathrm{Spec}\, T$$

を定める．各元 $m' \in T$ について $^a\phi^{-1}(Y_{m'}) = X_{\phi(m')}$ であることがわかるので，この写像 $^a\phi$ は連続である．層の準同型 $\phi' : {}^a\phi^{-1}\mathcal{S}_Y \to \mathcal{S}_X$ は図式

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\phi} & S \\ \downarrow & & \downarrow \\ {}^a\phi^{-1}\mathcal{S}_Y(X) & \xrightarrow{\phi'(X)} & \mathcal{S}_X(X) \end{array}$$

が可換になるように定義する．

一般の 1 スキームは次のように定義する．位相空間 X と半群の層 $\mathcal{S}_X$ の組 $(X, \mathcal{S}_X)$ が **1 スキーム**であるとは，$(U, \mathcal{S}_X|U)$ がアフィン 1 スキームとなるような開部分集

合 U で X が被覆されていることと定義する．このような開集合 U を X の**アフィン開集合**という．$\mathbf{1}$ スキーム $(X,\mathcal{S}_X)$ はしばしば単に X と書く．

$(X,\mathcal{S}_X)$ と $(Y,\mathcal{S}_Y)$ を $\mathbf{1}$ スキームとする．連続写像 $f_0 : X \to Y$ と半群の層の準同型 $\phi : f_0^{-1}\mathcal{S}_Y \to \mathcal{S}_X$ の組 $f = (f_0, \phi)$ が $\mathbf{1}$ スキームの**正則写像**であるとは X の各点の近傍でアフィン $\mathbf{1}$ スキームの写像となっていることとする．

S と T を半群とする．自然な全単射

$$\mathbf{1}\text{-Spec}\, S \times \mathbf{1}\text{-Spec}\, T \longrightarrow \mathbf{1}\text{-Spec}(S \oplus T)$$

が $(P_1, P_2) \mapsto (P_1 \oplus T) \cup (S \oplus P_2)$ により定義される．

X, Y を $\mathbf{1}$ スキームとする．$X \times_{\mathbf{1}} Y$ を集合としては直積 $X \times Y$ とし，位相は直積位相を考える．$X \times_{\mathbf{1}} Y$ に次のように $\mathbf{1}$ スキームの構造を入れる．アフィン開集合 $U = \mathbf{1}\text{-Spec}\, S \subset X$ と $V = \mathbf{1}\text{-Spec}\, T \subset Y$ について

$$\mathcal{S}_{X\times_{\mathbf{1}}Y}(U \times V) = S \oplus T$$

とおく．これにより $\mathbf{1}$ スキームの直積 $(X \times_{\mathbf{1}} Y, \mathcal{S}_{X\times_{\mathbf{1}}Y})$ が $\mathbf{1}$ スキームとして定義される．特に $\mathbf{1}\text{-Spec}(S \oplus T) = \mathbf{1}\text{-Spec}\, S \times_{\mathbf{1}} \mathbf{1}\text{-Spec}\, T$ である．

$N_{\mathbf{R}} \simeq \mathbf{R}^r$ の錐体 σ について**双対錐体** $\sigma^\vee \subset M_{\mathbf{R}} \simeq \mathbf{R}^r$ を

$$\sigma^\vee := \{x \in M_{\mathbf{R}}\, ;\, \langle x, u\rangle \geq 0, \forall u \in \sigma\}$$

により定義する．これは $M_{\mathbf{R}}$ の錐体である．同様に $M_{\mathbf{R}}$ の錐体の双対錐体が $N_{\mathbf{R}}$ に定義される．等式 $(\sigma^\vee)^\vee = \sigma$ や $(\sigma + \tau)^\vee = \sigma^\vee \cap \tau^\vee$ が成立することが知られている．また，$\sigma^\perp$ が

$$\sigma^\perp := \{x \in M_{\mathbf{R}}\, ;\, \langle x, u\rangle = 0, \forall u \in \sigma\}$$

で定義される．π を $N_{\mathbf{R}}$ の錐体とすると，任意の π の面 σ について $\pi^\vee \cap \sigma^\perp$ は $\pi^\vee$ の面となる．

X を $N_{\mathbf{R}}$ の扇とする．このとき，次のように X を $\mathbf{1}$ スキームとみなすことができる．各元 $\sigma \in X$ について，σ の面全体を $F(\sigma)$ と書けば，全単射 $\phi_\sigma : F(\sigma) \to \mathbf{1}\text{-Spec}(M \cap \sigma^\vee)$ が $\phi_\sigma(\eta) := M \cap (\sigma^\vee \backslash \eta^\perp)$ により定義される．この全単射により $F(\sigma)$ に アフィン $\mathbf{1}$ スキームの構造を入れる．このようなアフィン $\mathbf{1}$ スキーム $F(\sigma)$ の $\sigma \in X$ についての集まりは，アフィン開集合として貼り合わされ X に $\mathbf{1}$ スキームの構造が入る．

$\mathbf{1}$ スキーム X が**局所有限型**とは，各アフィン開集合 $U \subset X$ について $\mathcal{S}_X(U)$ が有限生成半群であることと定義する．X が有限型とは，局所有限型であって有限個のアフィン開集合で被覆されることと定義する．

補題 1.2 X を局所有限型の $\mathbf{1}$ スキームとする．各点 $x \in X$ について，X のアフィン開集合 $U = \mathbf{1}\text{-}\mathrm{Spec}\, S$ が一意的に存在して x が U の閉点となる．

この補題の半群 S を $\mathcal{S}_{X,x}$ と書いて X の x での**局所半群**と呼ぶ．この局所半群 $\mathcal{S}_{X,x}$ は局所有限型でない $\mathbf{1}$ スキームの場合も拡張して定義することができる．

x, x' を $\mathbf{1}$ スキーム X の点とする．x' が $\{x\}$ の X での閉包に含まれるとき，x' を x の**特殊化**という．このとき x は x' の**一般化**という．

S を半群とする．任意の可換環 A について半群環 $A[S]$ が定義される．$A[S]$ は $\{\mathbf{e}(m)\ ;\ m \in S\}$ を基底とする自由 A 加群 $\bigoplus_{m \in S} A\mathbf{e}(m)$ であって，$A[S]$ での積は $\mathbf{e}(m)\mathbf{e}(m') = \mathbf{e}(m+m')$ で定義される．$A[S]$ では $\mathbf{e}(0) = 1$ である．$\phi_A : S \to A[S]$ を $\phi_A(m) := \mathbf{e}(m)$ で定義される写像とする．$P \subset A[S]$ が可換環の素イデアルであれば $\phi_A^{-1}(P)$ は半群 S の素イデアルとなる．したがって，写像 ${}^a\phi_A : \mathrm{Spec}\, A[S] \to \mathbf{1}\text{-}\mathrm{Spec}\, S$ が得られる．層の写像 ${}^a\phi_A^* \mathcal{S}_{\mathbf{1}\text{-}\mathrm{Spec}\, S} \to \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\, A[S]}$ も自然に定義される．

X を $\mathbf{1}$ スキームとする．可換環 A に対して A スキーム X_A が次のように定義される．各アフィン開集合 $U = \mathbf{1}\text{-}\mathrm{Spec}\, S \subset X$ に対して $U_A = \mathrm{Spec}\, A[S]$ とおく．このような A スキーム U_A は自然に貼り合わされて A スキーム X_A が得られる．これは $X \times_{\mathbf{1}} \mathrm{Spec}\, A$ とも書いて，X の基底の A への変換という．

半群の準同型 $\phi : T \to S$ が**有限**とは，有限個の元 $x_1, \ldots, x_s \in S$ が存在して

$$S = (x_1 + \phi(T)) \cup \cdots \cup (x_s + \phi(T))$$

となることと定義する．A を 0 でない可換環とすると，ϕ が有限となるのは可換環の準同型 $A[T] \to A[S]$ により $A[S]$ が有限生成 $A[T]$ 加群となる場合であることが容易にわかる．

$\mathbf{1}$ スキームの正則写像 $f : X \to Y$ が**有限**とは，各アフィン開集合 $V \subset Y$ について引き戻し $U = f^{-1}(V)$ が X のアフィン開集合であって，対応する半群の準同型 $\mathcal{S}_Y(V) \to \mathcal{S}_X(U)$ が有限であることと定義する．

$\mathbf{1}$ スキーム X に対して対角写像 $\Delta_X : X \to X \times_{\mathbf{1}} X$ が自然に定義される．$\mathbf{1}$-スキームが**分離的**とはその対角写像が有限であることと定義する．X のアフィン開集合 U, V について，引き戻し $\Delta^{-1}(U \times V)$ は $U \cap V$ に等しい．

有限生成半群 S に対して，S を含む最小の加群を $M(S)$ で表わす．S で生成される実空間 $M(S)_{\mathbf{R}} := M(S) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ の錐体を $C(S)$ とする．$M(S)$ の双対 $\mathbf{Z}$ 加群を $N(S)$ とする．

補題 1.3 $\phi : T \to S$ を有限生成半群の単射準同型とする．このとき，ϕ が有限正則写像となるのは $\phi_{\mathbf{R}}(C(T)) = C(S)$ の場合である．ここで $\phi_{\mathbf{R}} : M(T)_{\mathbf{R}} \to M(S)_{\mathbf{R}}$ は ϕ の線形な拡張である．

証明　ϕ の拡張である加群の準同型 $\phi_{\mathbf{Z}} : M(T) \to M(S)$ は単射であるから，$M(T)$ は $M(S)$ の部分加群で $\phi_{\mathbf{R}}$ は埋め込みの準同型と考えてよい．このとき，錐体 $C(T)$ は明らかに $C(S)$ に含まれる．

ϕ を有限とする．定義から空でない部分集合 $\{x_1, \ldots, x_s\} \subset S$ が存在して

$$S = (x_1 + T) \cup \cdots \cup (x_s + T)$$

となる．双対錐体の $C(T)^\vee$ と $C(S)^\vee$ が $N(S)_{\mathbf{R}}$ で等しいことを示せばよい．$C(T) \subset C(S)$ であるから $C(S)^\vee \subset C(T)^\vee$ は明らかである．u を $N(S)_{\mathbf{R}} \setminus C(S)^\vee$ の元とする．このとき $\langle x, u \rangle < 0$ となる $x \in S$ が存在する．整数 $a > 0$ を十分大きくとれば $i = 1, \ldots, s$ について $\langle ax, u \rangle < \langle x_i, u \rangle$ となる．$as \in S$ であるから，ある i について $y \in T$ が存在して $ax = x_i + y$ となる．このとき $\langle y, u \rangle = \langle ax, u \rangle - \langle x_i, u \rangle < 0$ であるから u は $C(T)^\vee$ には含まれない．したがって $C(T)^\vee \subset C(S)^\vee$ である．

逆に $C(T) = C(S)$ とする．この仮定から任意の $x \in T$ について正の整数 d が存在して $dx \in S$ となる．したがって，体 k を任意にとると半群環 $k[S]$ はその部分環 $k[T]$ 上整である．$k[S]$ は k 上有限生成であるから $k[T]$ 加群として有限生成である．したがって半群の準同型は有限である．　証明終わり

X を局所有限型の $\mathbf{1}$ スキームとする．ある点 $\mathbf{0} \in X$ があって X が $\{\mathbf{0}\}$ の閉包に等しいとき，X を**既約**という．このとき $\mathbf{0}$ を X の**生成点**という．$\mathbf{0}$ を X の生成点とすると $\mathcal{S}_{X,\mathbf{0}}$ は階数有限の自由 $\mathbf{Z}$ 加群である．この加群を既約 $\mathbf{1}$ スキーム X の**底加群**という．この場合，任意のアフィン開集合 $U \subset X$ について $\mathcal{S}_X(U)$ は $\mathcal{S}_{X,\mathbf{0}}$ の部分加群となる．

定理 1.4 M と N を互いに双対な階数 $r \geq 0$ の $\mathbf{Z}$ 加群とする．$\mathbf{1}$ スキーム X が底加群 M の分離的な局所有限型既約 $\mathbf{1}$-スキームであるための必要十分条件は X が $N_{\mathbf{R}}$ の扇となることである．

証明　必要性だけを示す．各元 $x \in X$ に対して $\sigma_x := C(\mathcal{S}_x)^\vee \subset N_{\mathbf{R}}$ とする．

x, y を X の元とする．このとき，対角写像 $\Delta : X \to X \times X$ について

$$\Delta^{-1}(F(\sigma_x) \times F(\sigma_y)) = \{z \in X\ ;\ x, y \in \overline{\{z\}}\}$$

となる．X が分離的であるから，これは X のアフィン開集合である．したがって，これはある $w \in X$ についての $F(\sigma_w)$ に等しい．正則写像 $F(\sigma_w) \to F(\sigma_x \times \sigma_y)$ は有限であるから，半群の埋め込み写像 $\mathcal{S}_x + \mathcal{S}_y \subset \mathcal{S}_w$ は有限である．補題 1.3 により $C(\mathcal{S}_w)$ は $C(\mathcal{S}_x) + C(\mathcal{S}_y)$ に等しい．双対錐体をとることにより $\sigma_w = \sigma_x \cap \sigma_y$ を得る．したがって，σ_w は σ_x と σ_y の共通の面である．

特に $\sigma_x = \sigma_y$ とすると $\sigma_w = \sigma_x$ であって，w が x の一般化であることから $w = x$ となる．同様に $w = y$ もわかる．したがって $\sigma_x = \sigma_y$ から $x = y$ がわかる．このことから X を $N_{\mathbf{R}}$ の錐体の集合と考えることができる．このとき先に示したことから X が扇であることがわかる．　　　　証明終わり

X を扇とする．このとき，この扇に対応する体 k 上のトーリック多様体は基底の変換 $X_k = X \times_{\mathbf{1}} \operatorname{Spec} k$ に等しい．

2　実扇

M を階数 $r \geq 0$ の自由 $\mathbf{Z}$ 加群とする．

$M_{\mathbf{R}}$ の実扇 X は次のように $\mathbf{1}$ スキームと考えることができる．X の位相は有理扇と同じように定義する．すなわち，$\{F(\sigma)\ ;\ \sigma \in X\}$ が X の基本開集合族となる．各 $\sigma \in X$ に対して $\mathcal{S}_X(F(\sigma)) := \sigma^\vee$ と定義する．これは一般には有限生成ではない．

[1] では有理扇上の次数付き外積加群のカテゴリーを考えた．ドラム複体や交叉複体がこのカテゴリーの中に定義された．この理論を実扇に対して一般化したいと考えている．いまのところ実扇上の次数付き外積加群のカテゴリーを定義し，そこでの双対化関手を定義することはできた．

参考文献

[1] Masanori Ishida, Combinatorial and algebraic intersection complexes of toric varieties, preprint, http://www.math.tohoku.ac.jp/~ishida